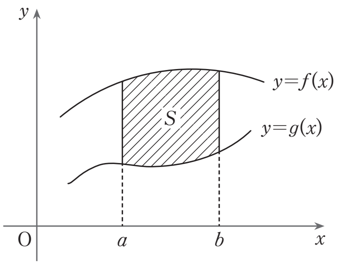
PART2　2つの曲線の間の面積

要点①　2つの曲線の間の面積

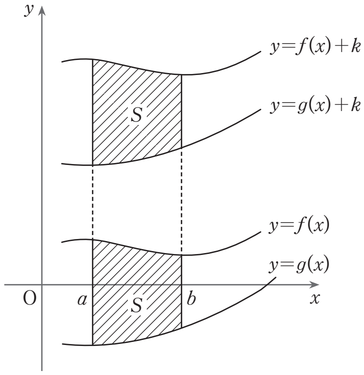


2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S を定積分で表す。

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x) \geqq 0$ のとき，求める面積 S は，$a \leqq x \leqq b$ における曲線 $y=f(x)$ と x 軸の間の面積から，曲線 $y=g(x)$ と x 軸の間の面積を引いたものとして求められるから

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

と表される。



また，区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ であるが，$f(x)$ や $g(x)$ がこの区間で負の値をとることがあるときは，2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ を y 軸方向に k だけ平行移動し，$f(x)$，$g(x)$ のグラフがともに，この区間で常に x 軸より上側にあるようにする。このとき

$$S=\int_a^b \{(f(x)+k)-(g(x)+k)\}dx$$

$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

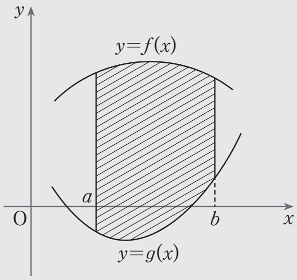
と表される。

よって，次のことが成り立つ。

2つの曲線の間の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$



【MEMO】

2 (1) 放物線 $y=x^2-x$ と x 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) 放物線 $y=-x^2+4x+2$ と直線 $y=2x-1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

Point Pickup

2 つの曲線の間の面積

2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれる部分の面積 S の求め方は以下。

① $y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフをかく。

② 方程式 $f(x)=g(x)$ を解き，2 曲線の共有点の x 座標を求める。

③ ②の交点をもとに，積分範囲 $a \leqq x \leqq b$ を定める。

④ 区間 $a \leqq x \leqq b$ において

常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき　$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

常に $f(x) \leqq g(x)$ のとき　$S=\int_a^b \{g(x)-f(x)\}dx$

第19講　PART2 確認問題

次の面積を求めよ。

1 放物線 $y=x^2-2x$ と x 軸で囲まれた部分の面積

$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

2 放物線 $y=x^2+x-1$ と直線 $y=2x+1$ で囲まれた部分の面積

$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

PART2　2 つの曲線の間の面積

2　(1)　放物線 $y=x^2-x$ と x 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(2)　放物線 $y=-x^2+4x+2$ と直線 $y=2x-1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

[解答]

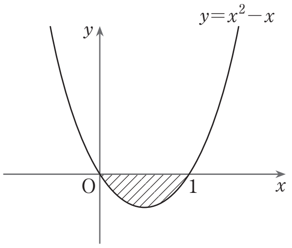
(1)　放物線 $y=x^2-x$ と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-x=0$$

の解である。これを解くと

$$x(x-1)=0 \quad より \quad x=0,\ 1$$

よって，求める面積は



$$\int_0^1 \{-(x^2-x)\}dx$$

$$=\int_0^1 (-x^2+x)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-(0+0)=\frac{1}{6}$$

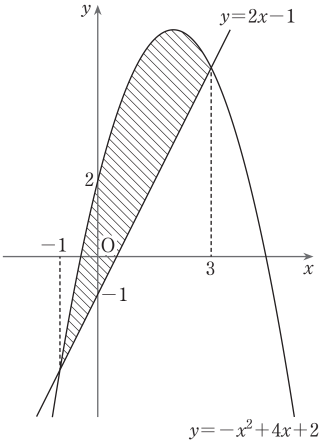
(2)　放物線 $y=-x^2+4x+2$ と直線 $y=2x-1$ の交点の x 座標は，方程式

$$-x^2+4x+2=2x-1$$

の解である。これを解くと

$$x^2-2x-3=0 \qquad (x+1)(x-3)=0 \quad より \quad x=-1,\ 3$$

よって，求める面積は



$$\int_{-1}^3 \{(-x^2+4x+2)-(2x-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^3 (-x^2+2x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^3=(-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\frac{32}{3}$$

第 19 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：3

[解説]

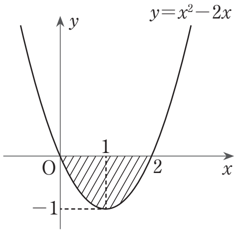
放物線 $y=x^2-2x$ と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-2x=0$$

の解である。これを解くと

$x(x-2)=0$ より

$$x=0,\ 2$$



よって，右図から求める面積は

$$\int_0^2 \{-(x^2-2x)\}dx \quad \text{[A]}$$

$$=\int_0^2 (-x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+4\right)-(0+0)=\frac{4}{3}$$

[A]　区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$, および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

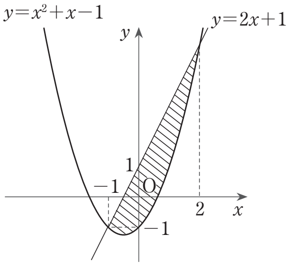
2 [正解] ウ：9，エ：2

[解説]

放物線 $y=x^2+x-1$ と直線 $y=2x+1$ の交点の x 座標は，方程式

$$x^2+x-1=2x+1$$

の解である。これを解くと



$$x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$x=-1,\ 2$$

よって，上図から求める面積は

$$\int_{-1}^{2}\{(2x+1)-(x^2+x-1)\}dx$$ [B]

$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$$

$$=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

[B]　区間 $a\leqq x\leqq b$ で常に $f(x)\geqq g(x)$ のとき，2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$, および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$